

Contrôle continu de Maths II

06/05/2010

1 Gausseries (6pts)

Résoudre, à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, les systèmes suivants (2pts/système):

$$S_1 : \begin{cases} x + y + z &= 9 \\ 2x + 3y - 9z &= 12 \\ 3x + 2y - z &= 10 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} 4x + 8z &= 2 \\ x + 3y - 2z &= 4 \\ 6x + 6y + 4z &= 0 \end{cases} \quad S_3 : \begin{cases} x + 2y + 4z &= 10 \\ 2x + 4y + z &= 19/2 \\ 4x + y + 2z &= 12 \end{cases}$$

2 Aventures dans l'espace (6pts)

On considère

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - 3z = 0\}$$

- 1) Montrer (en justifiant attentivement) que U est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. (1pt)
 - 2) On définit $v_1 = (1, 2, a)$ et $v_2 = (b, 3, 0)$. Trouver les valeurs de a et b telles que $v_1 \in U$ et $v_2 \in U$. Montrer qu'alors (v_1, v_2) est une base de U . En déduire la dimension de U . (1pt)
- On considère maintenant

$$W_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y = i\}$$

- 3) Pour chaque valeur de $i \in \mathbb{R}$, dire (puis prouver votre affirmation) si W_i est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. (indication : on pourra regarder la stabilité par multiplication du point $w_i = (0, -i, 0)$ après avoir étudié son appartenance à W_i .) (2pts)
- 4) Montrer que $v_1 \in W_0$ et en déduire que $\text{Vect}(v_1) \subset W_0 \cap U$. (0.5pts)
- 5) En exprimant les solutions de l'équation $\begin{cases} x + y - 3z &= 0 \\ 2x - y &= 0 \end{cases}$ en fonction de x , montrer que $W_0 \cap U \subset \{(x, 2x, x), x \in \mathbb{R}\}$, puis en déduire que $U \cap W_0 = \text{Vect}(v_1)$. Quelle est la dimension de $U \cap W_0$? (1,5pts)
- 6) (Bonus) Quelle sont les natures géométriques de U ? W_0 ? $\text{Vect}(v_1)$? W_1 ? Que peut-on dire de W_0 et W_1 ?

3 Le monde à l'envers (5pts)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que les vecteurs colonnes de A , c'est à dire $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 0)$ et $u_3 = (3, 1, 1)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on dire de (u_1, u_2, u_3) ? (1pt) [de A ? (Bonus)]

2) Inverser A à l'aide de la méthode de la matrice témoin. (1,5pts)

3) Calculer A^2 puis A^3 , puis $-A^3 + 2A^2$. En déduire l'expression de A^{-1} en fonction de A . Calculer A^{-1} . (1,5 pts)

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4) Calculer les produits AB et BA . A quelle condition sur b a-t-on $AB = BA$? (1pt)

4 J'engendre donc je suis (5pts)

Pour chacune des familles de vecteurs ci-dessous, dire, en justifiant, si elle est libre ou liée (0.25pts), puis donner la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre (0.25pts). Dans le cas où ce sous-espace vectoriel n'est pas $\mathbb{R}^3$ lui-même, donner son équation (sous forme d'une ou plusieurs équations)(0.5pts).

1) $\mathcal{F}_1 = \{(1, 1, 1), (2, 2, 0), (3, 0, 0)\}$

2) $\mathcal{F}_2 = \{(0, 1, 1), (0, 2, 0), (0, 0, 0)\}$

3) $\mathcal{F}_3 = \{(1, 1, 1)\}$

4) $\mathcal{F}_4 = \{(2, 1, 2), (1, 0, 1), (0, 3, 0)\}$

5) $\mathcal{F}_5 = \{(1, 0, 2), (2, 0, 4), (-3, 0, -6)\}$

Indication : on pourra chercher les équations sous la forme $ax+by+cz=0$ puis supposer $a=1$ ou $b=1$.